

## **Los números racionales**

# Los números racionales

Los números fraccionarios o fracciones permiten representar aquellas situaciones en las que se obtiene o se debe una parte de un objeto.

Todas las **fracciones equivalentes** entre sí representan el mismo **número racional**, y la mejor representación de este número es la **fracción irreducible**.

Una fracción irreducible es aquella cuyos numerador y denominador son primos entre sí. La manera de hallarla, denominada simplificación, consiste en dividir numerador y denominador de la fracción original, por el mcd de ambos.

Dos o más fracciones son equivalentes si representan la misma parte. Por ejemplo, la fracción 1/2 representa el mismo número que la fracción 2/4.

Forma decimal de un número racional								
La forma decimal está formada por una sección entera, a la izquierda de la coma, y una sección decimal, o sencillamente, decimales, a la derecha de la coma. Ejemplo:								
Nombre	decena	unidad	décima	centésima	milésima	diezmilésima	cienmilésima	millonésima
Cifras	1	5	3	2	5	7	0	2
<p>➤ La forma decimal estricta: si la división del numerador entre el denominador acaba por tener un resto igual a 0. Ejemplo: <math>12/5 = 2,4</math>.</p> <p>➤ La forma decimal se denomina periódica en caso contrario. La que cifra, o cifras, que se repiten llevan el símbolo periódico en la parte superior. Por ejemplo:</p> $\frac{5627}{9900} = 0,568383838383... = 0,56\widehat{83}$								
De la forma fraccionaria a la forma decimal								
Se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador de una fracción. Por ejemplo, la forma decimal de $12/5$ es 2,4, es decir, $12/5 = 2,4$ .								
De la forma decimal a la forma fraccionaria								
<p>➤ Si la forma decimal es estricta. Ejemplo, la forma fraccionaria de 3,465 es <math>3465/1000</math>.</p> <p>➤ Si la forma decimal es periódica. Ejemplo:</p> $23,4\widehat{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$								

<b>Las operaciones con números fraccionarios</b>				
<b>La suma</b>				
Denominadores iguales	Se suman los numeradores en el numerador y se mantiene el denominador: $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$			
Denominadores diferentes	Se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador y se suman siguiendo el procedimiento anterior: $\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{15}{18} + \frac{4}{18} = \frac{19}{18}$			
	<b>Métodos para encontrar el mismo denominador</b>			
	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 30%;">Multiplicando los denominadores</td> <td><math display="block">\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5 \times 9}{6 \times 9} + \frac{2 \times 6}{9 \times 6} = \frac{45}{54} + \frac{12}{54} = \frac{57}{54}</math></td> </tr> <tr> <td>Calculando el mcm de los denominadores</td> <td> <math display="block">\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5 \times 3 + 2 \times 2}{18} = \frac{15 + 4}{18} = \frac{19}{18}</math> <div style="margin-left: 40px;"> <math>\uparrow</math>  mcm(6,9)=18  18/6=3  18/9=2 </div> </td> </tr> </table>	Multiplicando los denominadores	$\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5 \times 9}{6 \times 9} + \frac{2 \times 6}{9 \times 6} = \frac{45}{54} + \frac{12}{54} = \frac{57}{54}$	Calculando el mcm de los denominadores
Multiplicando los denominadores	$\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5 \times 9}{6 \times 9} + \frac{2 \times 6}{9 \times 6} = \frac{45}{54} + \frac{12}{54} = \frac{57}{54}$			
Calculando el mcm de los denominadores	$\frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5 \times 3 + 2 \times 2}{18} = \frac{15 + 4}{18} = \frac{19}{18}$ <div style="margin-left: 40px;"> <math>\uparrow</math>  mcm(6,9)=18  18/6=3  18/9=2 </div>			
<b>La resta</b>				
Suma con el opuesto: $\frac{4}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4}{7} + \frac{-2}{3}$				
<b>La multiplicación</b>				
Producto de numeradores en el numerador y producto de denominadores en el denominador: $\frac{2}{3} \times \frac{-2}{7} = \frac{2 \times (-2)}{3 \times 7} = \frac{-4}{21}$				
La fracción de un número	dos tercios de 125 es $\frac{2}{3} \times 125 = \frac{2}{3} \times \frac{125}{1} = \frac{250}{3}$			
El inverso de un número	3/7 es el inverso de 7/3			
<b>La división</b>				
Es el producto del numerador por el inverso del denominador: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 5} = \frac{27}{20}$				

## ¿Qué es un número fraccionario?

Los números enteros no pueden expresar todas las situaciones posibles en las que intervienen cálculos numéricos: los números fraccionarios dan cuenta, por ejemplo, de aquellas situaciones en las que se produce un reparto de objetos.

Siempre que se suman, restan o multiplican dos números enteros, el resultado es un número entero. Esto no sucede así cuando los números se dividen. Por ejemplo, al dividir 12 entre 4,  $12 / 4$ , el resultado es un número entero, el 3; al dividir 1 entre 2,  $1 / 2$ , el resultado no es un número entero.

En este último caso surge la cuestión del significado de esta última expresión,  $1/2$ , y otras similares. Este tipo de expresiones conforman los números fraccionarios y se pueden asociar, por ejemplo, al reparto de objetos entre varias personas. Así, por ejemplo, si se quieren repartir 8 pasteles iguales entre 2 personas, cada una de ellas obtendrá 4 pasteles, ya que  $8 : 2 = 4$ . Ahora bien, si se quiere repartir 1 pastel entre 2 personas, no existe ningún número entero que pueda representar el resultado de esta operación. En este caso, a cada persona no le corresponde más que una parte o fracción del pastel, en concreto, la mitad del pastel. El número que expresa este reparto es, simplemente, la forma de la división con la barra, es decir,  $1/2$ . Este número es un número fraccionario.

Un número fraccionario, o quebrado, o simplemente fracción, se expresa en forma de cociente de números enteros, con una barra entre ambos números, que puede ser horizontal o inclinada. Un ejemplo de número fraccionario quebrado puede ser:

$$\frac{12}{5}, \text{ o también, } 12/5$$

En este caso, el 12 se denomina numerador, y el 5, denominador. Como se puede observar, pues, los elementos de un número fraccionario se denominan de manera específica, diferenciada de la denominación de los elementos de una división entera.

Para leer estas expresiones se utiliza, por lo general, el nombre del número del numerador, seguido del plural del partitivo correspondiente al denominador (si el numerador es 1, se utiliza el singular). Así, por ejemplo,  $12/5$  se lee "doce quintos";  $1/7$  es "un séptimo";  $3/11$  es "tres onceavos", etc. Ahora bien, a veces, sobre todo si el denominador es muy grande, simplemente se utiliza la expresión "partido por", o bien, "entre", entre el numerador y el denominador. Así,  $12/5$  es "doce partido por cinco", o bien, "doce entre 5".

Una fracción que tenga el numerador menor que el denominador, y ambos positivos, se denomina fracción propia. Por ejemplo,  $1/4$  es una fracción propia.

Cualquier número entero puede convertirse en un número fraccionario. Para ello, la fracción debe tener el numerador igual al número entero en cuestión y el denominador debe ser 1. Así pues, por ejemplo,  $8 = 8/1$ . También,  $-3 = -3/1$ .

Este hecho nos muestra cómo los números enteros son un subconjunto de los números fraccionarios o, dicho de otro modo, cualquier número entero es, también, un número fraccionario.

## ¿Cuál es el signo de una fracción?

Las reglas para establecer el signo de una división entera también se utilizan para establecer el signo de una fracción.

Tanto el numerador como el denominador de una fracción pueden ser positivos o negativos. Utilizando la regla de los signos para la división de números enteros, puede deducirse el signo de una fracción. Por ejemplo:

$$\frac{+4}{+7} = \frac{4}{7} \quad \frac{-6}{-11} = \frac{6}{11} \text{ son fracciones positivas}$$

$$\frac{-4}{+7} = \frac{-4}{7} \quad \frac{+6}{-11} = \frac{-6}{11} \text{ son fracciones negativas}$$

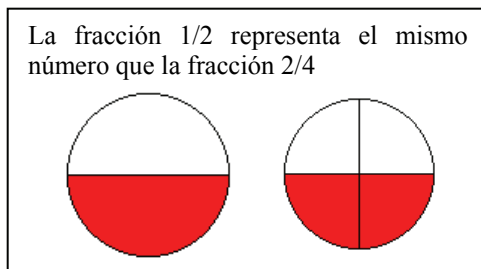
Es decir, una fracción es positiva si numerador y denominador tienen el mismo signo; una fracción es negativa, si numerador y denominador tienen distinto signo. Normalmente, el signo de la fracción se antepone al numerador, mientras que el denominador no va precedido de signo alguno, tal y como se ilustra en los ejemplos. El signo de la fracción también puede situarse antepuesto a la línea fraccionaria, a su misma altura, como por ejemplo:

$$\frac{4}{7} = +\frac{4}{7} \quad \frac{-6}{11} = -\frac{6}{11}$$

### ¿En qué casos dos o más fracciones son equivalentes?

Dos (o más) fracciones son equivalentes cuando representan un mismo número; existe una prueba sencilla para averiguarlo.

Resulta fácil observar cómo hay fracciones diferentes que representan el mismo número. Por ejemplo, la fracción  $1/2$  representa el mismo número que la fracción  $2/4$ . La comprobación de este hecho es sencilla: si se reparte un pastel equitativamente entre dos personas, a cada una le corresponderá la mitad del pastel, es decir,  $1/2$ . Si se reparten equitativamente 2 pasteles entre 4 personas, a cada una le corresponderá, evidentemente, la misma cantidad de pastel que en el caso anterior; ahora bien, en este caso, su porción es igual a  $2/4$ . Queda claro, pues, que  $1/2 = 2/4$ .



Cuando dos fracciones expresan el mismo número, se dice que son fracciones equivalentes. En el ejemplo,  $1/2$  y  $2/4$  son fracciones equivalentes. De hecho, una fracción puede ser equivalente a muchas otras. Así:

$$1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10$$

son todas fracciones equivalentes, es decir, expresan el mismo número.

La manera más sencilla de encontrar una fracción equivalente a otra dada consiste en multiplicar tanto el numerador como el denominador de ésta por un mismo número. Por ejemplo, para construir una fracción equivalente a  $5/11$ , se puede multiplicar numerador y denominador por 3, con lo que se obtiene  $15/33$ ; de este modo, se puede asegurar que ambas fracciones son equivalentes, es decir,  $5/11 = 15/33$ . Evidentemente, si se dividen el numerador y el denominador de una fracción, también se obtiene una fracción equivalente. Por ejemplo, la fracción  $6/12$  es equivalente a la fracción  $2/4$ , ya que  $6 : 3 = 2$  y  $12 : 3 = 4$ .

Existe una prueba sencilla que permite saber cuándo dos fracciones son equivalentes. Se trata de multiplicar el numerador de una por el denominador de la otra, y viceversa. Si los resultados son iguales, se puede asegurar que ambas fracciones son equivalentes. Por ejemplo:

$$4/10 \text{ es equivalente a } 6/15 \text{ porque } 4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$$

$$2/6 \text{ no es equivalente a } 7/11 \text{ porque } 2 \cdot 11 \neq 6 \cdot 7$$

El símbolo  $\neq$  es el signo de desigualdad, y se sitúa entre dos expresiones con resultados diferentes.

A veces, este proceso se denomina, para abreviar, multiplicar en cruz:

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{15} = 10 \cdot 6 = 60$$

$$\frac{2}{6} \times \frac{7}{11} = 4 \cdot 15 = 60$$

## ¿Qué es una fracción irreducible?

Una fracción irreducible se caracteriza por el hecho de que numerador y denominador son primos entre sí. El proceso para hallar la fracción irreducible equivalente a una fracción se denomina simplificación.

El hecho de que muchas fracciones puedan representar el mismo número complica mucho su manipulación. Para evitar esta complicación, se suele destacar una fracción del conjunto de todas las fracciones que son equivalentes entre sí, la denominada fracción irreducible. Una fracción irreducible se caracteriza por el hecho de que numerador y denominador son primos entre sí, esto es, son números cuyo mcd es 1. Por ejemplo,  $8/16$  no es una fracción irreducible, ya que  $\text{mcd}(8,16) = 8$ . En cambio,  $4/9$  es una fracción irreducible porque  $\text{mcd}(4,9) = 1$ . El proceso de busca de la fracción irreducible equivalente a una dada se denomina simplificación de la fracción.

Dada una fracción cualquiera, siempre puede encontrarse una fracción irreducible que sea equivalente a ésta. El método más sencillo para hacerlo consiste en dividir el numerador y el denominador entre su mcd. Por ejemplo, para convertir la fracción  $18/12$  en una fracción irreducible, es necesario dividir numerador y denominador

entre el  $\text{mcd}(18,12) = 6$ . La fracción resultante es  $\frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}$ .

Es evidente que para encontrar una fracción equivalente a una fracción irreducible, debe multiplicarse el numerador y el denominador de la fracción irreducible por un número entero. Así pues, cualquier fracción equivalente a una fracción irreducible (diferente de ella misma) no puede ser nunca irreducible. En definitiva, no es posible que dos fracciones irreducibles diferentes sean equivalentes. Este hecho permite seleccionar, de entre todas las fracciones equivalentes entre sí, la fracción irreducible como representante de todas ellas.

## ¿Qué es un número racional?

Todas las fracciones equivalentes a una dada representan un mismo número, que se denomina número racional. La mejor representación de este número es la fracción irreducible.

Un número racional es aquel que puede expresarse como una fracción, o como cualquiera de sus equivalentes. Así, por ejemplo, el número racional que se expresa con la fracción irreducible  $1/3$  puede también expresarse con la fracción  $2/6$  o, también, con la fracción  $7/21$ . En estos casos, las fracciones son diferentes, pero el número racional representado es el mismo. Este hecho se podría comparar con los distintos nombres con los que se puede conocer a una misma persona; por ejemplo, alguien que se llame Manuela puede ser conocida por Lola, Loli, Lolita, o cualquier otro nombre o mote, pero no por eso dejará de ser la misma persona. De la misma manera, un mismo número racional puede expresarse de diferentes formas (fracciones) y no dejará, por ello, de ser el mismo número. Ahora bien, la mejor manera de expresar un número racional es a través de una fracción irreducible porque ésta siempre será la más sencilla. En el ejemplo, la mejor manera de representar el número racional anterior es  $1/3$  porque es una fracción irreducible.

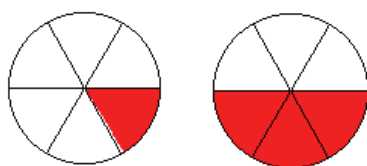
A veces, los términos *número racional*, *número fraccionario*, *quebrado* o *fracción* se suelen usar indistintamente, aunque sean conceptos ligeramente diferentes, para indicar el concepto de número racional tal y como se acaba de definir. Se suelen usar estos últimos, *quebrado* y *fracción*, con preferencia, ya que son los más breves.

## ¿Cómo se realiza la suma de fracciones con el mismo denominador?

La suma de dos fracciones con el mismo denominador es igual a una fracción cuyo numerador es la suma de numeradores, y cuyo denominador es el mismo denominador común.

La suma de números fraccionarios es una operación que expresa la reunión de los "fragmentos" expresados por los números sumados, y establece un número fraccionario que expresa esta reunión. Se pueden distinguir dos casos, según si el denominador es común o no.

La suma de  $\frac{1}{6}$  con  $\frac{3}{6}$  se puede representar con la reunión de estos dos "fragmentos" coloreados:



Resulta fácil determinar que el resultado de la suma es  $\frac{4}{6}$ . Este hecho puede generalizarse de la siguiente manera: la suma de dos números con el mismo denominador es igual a una fracción cuyo numerador es la suma de numeradores, y cuyo denominador es el mismo denominador común. En el ejemplo:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6}$$

## ¿Cómo se realiza la suma de fracciones con distinto denominador?

Para sumar dos fracciones con distinto denominador, se debe sustituir cada una de ellas por otra fracción equivalente con el mismo denominador y, posteriormente, sumar las fracciones resultantes.

Para sumar dos fracciones con distinto denominador se debe sustituir cada una de ellas por otra fracción equivalente con el mismo denominador; de esta manera, se podrán aplicar los conocimientos sobre la suma de fracciones con el mismo denominador. Por ejemplo, si se quiere realizar la suma  $\frac{3}{18} + \frac{5}{12}$ , se debe buscar una fracción equivalente a cada una de ellas que tenga el mismo denominador:

$$\frac{3}{18} = \frac{6}{36} = \frac{9}{54} = \frac{12}{72} = \dots$$
$$\frac{5}{12} = \frac{10}{24} = \frac{15}{36} = \frac{20}{48} = \frac{25}{60} = \dots$$

en este caso encontramos que las fracciones  $\frac{6}{36}$  y  $\frac{15}{36}$  comparten el denominador. De este modo, la suma puede realizarse fácilmente así:

$$\frac{3}{18} + \frac{5}{12} = \frac{6}{36} + \frac{15}{36} = \frac{21}{36}$$

Ahora bien, este método puede llegar a ser realmente costoso porque se podría tardar mucho tiempo en encontrar dos fracciones con el mismo denominador.

## ¿Cómo se reducen las dos o más fracciones de una suma al mismo denominador?

Hay dos métodos que permiten reducir dos o más fracciones a un mismo denominador: la multiplicación de denominadores y el cálculo del mcm de los denominadores.

Existen dos métodos que permiten hacer lo mismo de manera más rápida:

### 1.º La multiplicación de denominadores

Consiste en multiplicar el numerador y el denominador de las dos fracciones que se suman por el denominador de la otra. Así se consigue que las fracciones resultantes tengan el mismo denominador y, claro está, sean equivalentes a las originales. En el ejemplo anterior:

$$\frac{3}{18} + \frac{5}{12} = \frac{3 \cdot 12}{18 \cdot 12} + \frac{5 \cdot 18}{12 \cdot 18} = \frac{36}{216} + \frac{90}{216} = \frac{126}{216}$$

El resultado no parece el mismo, pero es fácil darse cuenta de que las fracciones resultantes en ambos casos son equivalentes:  $21/36 = 126/216$ . Se puede observar que, en general, este método tiene la desventaja de ofrecer resultados con números elevados, aunque, evidentemente, pueden simplificarse, lo siempre recomendable cuando se manipulan fracciones.

### 2.º El cálculo del mcm de los denominadores

Este método se basa en el cálculo del mcm de los denominadores para hallar el nuevo denominador común. Los pasos que se deben seguir son:

1. Calcular el mcm de los denominadores involucrados en la suma. Este resultado será el denominador común. En el caso del ejemplo,  $\text{mcm}(12,18) = 36$ .
2. Multiplicar el numerador de cada fracción por el resultado de dividir el mcm entre el denominador de la fracción respectiva. Así, en el ejemplo, el numerador de la fracción  $3/18$ , que es 3, debe multiplicarse por el resultado de  $36 : 18 = 2$ ; del mismo modo, el numerador de la fracción  $5/12$ , que es 5, debe multiplicarse por el resultado de  $36 : 12 = 3$ .

Las fracciones resultantes son equivalentes a las anteriores y tienen el denominador común:

$$\frac{6}{36} = \frac{3}{18} \quad \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

3. Finalmente, sumar las fracciones con el mismo denominador halladas en el apartado anterior:

$$\frac{3}{18} + \frac{5}{12} = \frac{6}{36} + \frac{15}{36} = \frac{21}{36}$$

Se puede comprobar que el primer método es más rápido, pero en el segundo caso, el resultado estará siempre más simplificado. Esto es más fácil de observar, si la suma involucra varias fracciones, como en este ejemplo:

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{4} + \frac{3}{18} = \frac{2 \cdot 6}{36} + \frac{1 \cdot 9}{36} + \frac{3 \cdot 2}{36} = \frac{12 + 9 + 6}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

mcm(6,8,18) = 36

Por lo tanto, si no hay demasiadas sumas, es posible utilizar el primer método, pero si hay tres o más sumas, es recomendable seguir el método del cálculo del mcm.



## ¿Cuáles son las propiedades de la suma de fracciones?

Las propiedades de la suma de fracciones son la conmutativa, la asociativa, el elemento neutro y el elemento opuesto.

Las propiedades de la suma de fracciones son:

➤ La propiedad conmutativa

El orden de los sumandos en una suma de dos o más números racionales no altera el resultado. Así, por ejemplo:  $\frac{-3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \frac{-3}{6} = \frac{-1}{6}$ .

➤ La propiedad asociativa

El resultado de una expresión con dos o más sumas de números enteros no depende del orden en el que se agrupan las diferentes sumas. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{-2}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) + \frac{-2}{3} = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{3} + \frac{-2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Además de estas propiedades, existe una serie de elementos con propiedades interesantes respecto a la suma de números racionales:

➤ El elemento neutro de la suma

El elemento neutro de la suma es aquel que sumado a cualquier otro no lo modifica. El elemento neutro de la suma de fracciones (y de enteros) es el 0. Por ejemplo:

$$\frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5}$$

➤ El elemento opuesto

Todo número racional tiene un opuesto, que cumple que la suma de ambos es igual al elemento neutro de la suma, es decir, es igual a 0. Así, por ejemplo, el opuesto de  $1/3$

es  $-1/3$ , ya que  $\frac{1}{3} + \frac{-1}{3} = 0$ . Para hallar el opuesto de un número, sólo es necesario

cambiarle el signo al numerador, como se acaba de comprobar.

Evidentemente, estas propiedades también lo son de la suma de números enteros.

## ¿Cómo se realiza la resta de fracciones?

La resta de dos fracciones se reduce a la suma con la fracción opuesta.

La resta es la operación opuesta a la suma, al igual que sucede entre los números enteros. La resta de fracciones se reduce a la suma con la fracción opuesta; así pues,

por ejemplo,  $\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8} + \frac{-2}{8} = \frac{3}{8}$ . Es evidente que si se suma este resultado con el

número restado,  $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ , se obtiene el número inicial.

## ¿Cómo se realiza la multiplicación de fracciones y cuáles son sus propiedades?

Para multiplicar dos fracciones, se deben multiplicar ambos numeradores y poner el resultado en el numerador; también se deben multiplicar ambos denominadores y poner el resultado en el denominador.

En muchos casos, las fracciones que tienen por denominador 100 se expresan en forma de porcentaje con el símbolo %, denominado "tanto por ciento". Así, la fracción  $23/100$  puede indicarse, también, como 23%, y se lee "23 por ciento". El cálculo de tantos por ciento se reduce al cálculo con fracciones.

El resultado de multiplicar dos fracciones es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Por ejemplo:  $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$ .

La multiplicación permite calcular la fracción de un número: para hallar el triple de 39 se realiza la siguiente multiplicación:  $3 \cdot 39 = 117$ . De la misma manera, para calcular una fracción de un número debe multiplicarse la fracción por el número. Así, tres cuartos de 120 es igual a

$$\frac{3}{4} \times 120 = \frac{3}{4} \times \frac{120}{1} = \frac{3 \times 120}{4} = \frac{360}{4} = 90$$

## ¿Cuáles son las propiedades del producto de fracciones?

Las propiedades del producto de fracciones son la conmutativa, la asociativa, la distributiva respecto a la suma, el elemento neutro y el elemento inverso.

Las propiedades de la multiplicación de fracciones son las mismas que las propiedades de la multiplicación de números enteros y naturales:

### ➤ Propiedad conmutativa

El orden de los factores de un producto de dos o más números racionales no altera el resultado. Así, por ejemplo:  $\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{15}$

### ➤ Propiedad asociativa

El resultado de una expresión con dos o más productos de números enteros no depende del orden en que se agrupan los productos. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \left( \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \right) \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \right) = \frac{6}{60}$$

### ➤ Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma

El producto de una fracción por una suma de fracciones es igual a la suma de los productos de la primera fracción con las fracciones que forman la suma. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{7} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$$

### ➤ Elemento neutro del producto

El elemento neutro del producto es aquel que multiplicado a cualquier otro no lo modifica. El elemento neutro de la multiplicación de fracciones es el 1. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

### ➤ Todo número racional, excepto el 0, tiene un inverso

El inverso de un número cumple que el producto de ambos es igual al elemento neutro del producto, es decir, es igual a 1. Así, por ejemplo, el opuesto de  $2/5$  es  $5/2$ ,

ya que  $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2} = \frac{10}{10} = 1$ . Como puede comprobarse en el ejemplo, el inverso de una fracción se halla intercambiando de posición numerador y denominador.

## ¿Cómo se realiza la división de fracciones?

La división de fracciones es el producto de una fracción por la inversa de la otra.

La división de dos fracciones se puede indicar de dos maneras. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{11} \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}}$$

En el segundo caso, debe alargarse la barra de división con respecto a las barras de fracción para no dejar lugar a dudas sobre qué es el numerador y qué el denominador.

El resultado de la división de dos fracciones es igual al producto de la fracción que se encuentra en el numerador, multiplicada por la inversa de la fracción del

denominador. Así pues:  $\frac{2}{3} : \frac{7}{11} = \frac{2}{3} \times \frac{11}{7} = \frac{22}{21}$

Otra regla fácil de recordar para efectuar una división es ésta: se multiplican en cruz numeradores con denominadores, y los resultados también se sitúan en cruz. En el

caso anterior:  $\frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 7} = \frac{22}{21}$ .

A partir de la división de números se puede expresar el inverso de un número de otra forma: como 1 dividido entre el número. Así, por ejemplo, el inverso de  $\frac{4}{7}$  es  $\frac{1}{\frac{4}{7}}$

## ¿Cuál es el orden en el que deben realizarse las operaciones elementales entre fracciones?

En una expresión en la que se encadenan diferentes operaciones entre fracciones, primero deben resolverse los paréntesis, a continuación la división y la multiplicación, y finalmente la resta y la suma.

Al encadenarse varias operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) en una expresión con números racionales, debe respetarse el mismo orden que el enunciado para los números naturales y enteros:

- En primer lugar, se deben realizar las operaciones entre paréntesis.
- En segundo lugar, las multiplicaciones y divisiones, empezando por estas últimas.
- En tercer lugar, las sumas y restas, empezando por estas últimas.

Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right) \times \frac{8}{3} - \frac{5}{12} \uparrow \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} - \frac{5}{12} \uparrow \frac{24}{12} - \frac{5}{12} = \frac{19}{12}$$

operaciones dentro del parentesis      prioridad de la multiplicación sobre la resta

Ahora bien, en el primer paso, en lugar de operar dentro del paréntesis, también podría haberse aplicado la propiedad distributiva, sin que ello modificase el resultado:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\right) \times \frac{8}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{8}{3} - \frac{5}{12} = \frac{8}{12} + \frac{16}{12} - \frac{5}{12} = \frac{19}{12}$$

propiedad distributiva                      prioridad de la multiplicación sobre suma y resta

## ¿Qué es la forma decimal de un número racional?

Un número racional puede expresarse de distintas formas, aparte de la forma fraccionaria. Una de las más comunes es la forma decimal, que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador.

En el mundo anglosajón, en lugar de la coma se usa un punto, como puede observarse en cualquier calculadora.

Para obtener la forma decimal de una fracción, debe dividirse el numerador entre el denominador, como en la división entera, pero sin detenerse hasta que el resto sea cero, añadiendo los decimales correspondientes. Por ejemplo, la forma decimal de  $12/5$  es 2,4, es decir,  $12/5 = 2,4$ .

La forma decimal está formada por una sección entera, a la izquierda de la coma, y una sección decimal, o sencillamente, decimales, a la derecha de la coma. En esta tabla se puede observar la denominación de las seis primeras cifras a la derecha de la coma del número 15,325702.

Nombre	decena	unidad	décima	centésima	milésima	diezmilésima	cienmilésima	millonésima
Cifras	1	5	3	2	5	7	0	2

➤ La forma decimal se denomina estricta si la división del numerador entre el denominador acaba por tener un resto igual a 0. El caso anterior,  $12/5 = 2,4$  es un ejemplo de ello.

➤ La forma decimal se denomina periódica en caso contrario. Por ejemplo,  $1/3 = 0,33333333... = 0,\overline{3}$ . Se puede observar la que cifra, o cifras, que se repiten llevan el símbolo periódico en la parte superior. Es evidente que el grupo de números repetidos puede ser superior a uno. Por ejemplo,

$$\frac{5627}{9900} = 0,568383838383... = 0,56\overline{83}$$

Unas sencillas normas permiten transformar la forma decimal de un número en la forma fraccionaria:

➤ Si la forma decimal es exacta, solamente se debe eliminar la coma del número decimal; el número resultante será el numerador de la fracción. El denominador debe ser un número cuya primera cifra sea un 1, y con tantos ceros como decimales tiene el número decimal. Por ejemplo, la forma fraccionaria de 3,465 es  $3465/1000$ .

- Si la forma decimal es periódica, deben seguirse estos pasos:
- El numerador es igual a la diferencia del número en cuestión, sin coma ni símbolo periódico (con lo que se transforma en un número entero), y el mismo número, sin coma ni cifras bajo el símbolo periódico.
  - El denominador debe ser un entero con tantos 9 como cifras bajo el símbolo periódico, y tantos 0 como cifras de la sección decimal que no se encuentran dentro del símbolo periódico.

Por lo tanto, la fracción que corresponde al número periódico es:

$$23,4\overline{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

## ¿Cómo se aproxima un número racional por un número decimal?

Para evitar números excesivamente largos, se recurre a aproximaciones de éstos por otros con menos cifras. Ahora bien, estas aproximaciones han de ser lo suficientemente cercanas al número en cuestión. La mejor vía de aproximar un número es el redondeo.

El redondeo de un número hasta una cifra determinada, llamada cifra de redondeo, consiste en escribir el número decimal más cercano al número dado, de manera que sólo tenga las cifras decimales hasta la de redondeo. Por ejemplo, el redondeo de  $1/3$  por las centésimas, consiste en encontrar el número decimal más cercano a  $1/3$ , que sólo tenga decimales hasta las centésimas. En este caso, es fácil darse cuenta de que el redondeo de  $1/3$  por las centésimas es  $0,33$ . Para expresar que  $1/3$  es aproximadamente igual a  $0,33$  se utiliza el símbolo  $\approx$ , que se lee "aproximadamente igual". Así, pues  $\frac{1}{3} \approx 0,33$ . En todo caso, no hay que abusar del uso de este símbolo.

Éstas son las reglas para el redondeo de un número hasta una cifra determinada:

➤ Si la cifra siguiente a la del redondeo es inferior a 5, se eliminan todas las cifras decimales posteriores a la cifra de redondeo. Así, por ejemplo, si se quiere redondear el número  $32,543613$  por las centésimas, podemos decir que  $32,543613 \approx 32,54$ .

➤ Si la cifra siguiente a la del redondeo es superior a 4, se eliminan todas las cifras decimales posteriores a la cifra de redondeo, y a la cifra de redondeo se le suma una unidad. Así, por ejemplo, si se quiere redondear el número  $32,5436134$  por las milésimas,  $32,5436134 \approx 32,544$ . Si la cifra de redondeo es 9, se actúa de la misma manera que en una suma de números decimales, cuando a una cifra 9 se le suma 1. Por ejemplo, si se quiere redondear el número  $2,749623$  por las milésimas, como la cifra de las diezmilésimas es 6, mayor que 4, debe sumarse una unidad a la cifra de las milésimas, 9; por lo tanto, el número redondeado será igual a  $2,750$  o, lo que es lo mismo,  $2,75$ .

## ¿Cómo se ordenan los números racionales en una recta?

Como en el caso de los números enteros, dados dos números racionales cualesquiera, diferentes, uno de ellos siempre será mayor que el otro, por lo tanto, pueden ordenarse todos a lo largo de una recta.

La manera más sencilla de comprobarlo, quizá, se reduce a escribir su expresión decimal, que muestra de manera inmediata cuál de los dos es mayor. También pueden restarse ambos números para averiguar cuál es mayor. Por ejemplo:

$$\frac{4}{7} - \frac{13}{15} = \frac{4 \cdot 15 - 7 \cdot 13}{7 \cdot 15} = \frac{-31}{105}$$

por lo tanto,  $13/15 > 4/7$ .

Al estar ordenados, los números racionales pueden representarse en una recta, de modo similar a los enteros.

Ahora bien, su representación presenta una diferencia importante con los enteros: entre dos números racionales diferentes siempre podemos encontrar otro (de hecho, se pueden encontrar muchísimos). Para encontrar un número que se halle entre cualesquiera otros dos números, sólo es necesario sumarlos y dividir el resultado entre 2. Por ejemplo, el número  $3/4$  es menor que el número  $9/5$ ; es fácil

Las operaciones básicas influyen en la ordenación de los racionales de la misma manera que lo hacen en la ordenación de los enteros.

comprobar que  $\frac{3}{4} + \frac{9}{5} = \frac{51}{20}$  se encuentra entre ambos números, es decir,

$\frac{3}{4} < \frac{51}{20} < \frac{9}{5}$ . Esta circunstancia permite prever que los números racionales pueden

cubrir muchos más puntos de la recta donde se representan y que siempre que queramos, podremos ampliar una sección cualquiera de esta recta, porque siempre encontraremos más números racionales, como muestra este ejemplo:

